Über die Trägheit der Wände zwischen Weißschen Bezirken

Von Werner Döring

Aus dem Institut für theoretische Physik der Technischen Hochschule Braunschweig

(Z. Naturforschg. 3a, 373—379 [1948]; eingegangen am 26. April 1948)

Da das magnetische Moment der Elektronen mit einem mechanischen Drehimpuls verknüpft ist, muß die Verteilung der Magnetisierungsvektoren in einer bewegten Wand zwischen zwei Weißschen Bezirken sich von derjenigen in der gleichen Wand in Ruhe etwas unterscheiden. Der Energieinhalt der bewegten Wand ist deshalb etwas größer als der der ruhenden Wand. Der Unterschied ist proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit, also gerade so, als ob die Wand eine träge Masse besäße. Diese Erscheinung ist von Einfluß auf die Dispersion der ferromagnetischen Permeabilität.

In einem ferromagnetischen Kristall mit kleinen inneren Spannungen liegt die Magnetisierung an jeder Stelle nahezu in einer der kristallographisch bestimmten Vorzugsrichtungen, also bei Eisen in einer der sechs tetragonalen Richtungen. An den Stellen, wo die Magnetisierungsrichtung von einer Vorzugslage in eine andere übergeht, den sogen. Wänden, stellt sich die Spinverteilung so ein, daß Gleichgewicht besteht zwischen den Austauschkräften, welche benachbarte Spins möglichst parallel zu stellen suchen, und der Kristallenergie, welche die Spins möglichst in die Vorzugsrichtung zu drehen sucht, also einen plötzlichen Übergang der Spinrichtung herzustellen strebt. Da bei der Erzeugung einer Wand sowohl gegen die Austauschkräfte wie gegen die Kristallenergie Arbeit zu leisten ist, besitzt die Flächeneinheit einer Wand einen gewissen Energieinhalt γ, dessen Größe für die Theorie der Wandverschiebungsprozesse, insbesondere für die Theorie der Koerzitivkraft, von großer Bedeutung ist. Die Berechnung der Wandenergie für den Fall überwiegender Spannungsenergie wurde erstmalig von Bloch[1], in einfacherer und anschaulicherer Form später von Kersten[2], Becker und Döring[3] durchgeführt. Für den im folgenden hauptsächlich diskutierten Fall überwiegender Kristallenergie führte Néel[4] die entsprechenden Berechnungen durch.

Bei diesen Betrachtungen wurde stets die Wand als ruhend angenommen. In einem zeitlich veränderlichen Magnetfeld treten aber auch Bewegungen der Wände auf. Bisher ist nicht beachtet worden, daß die Wandenergie γ einer bewegten Wand größer ist als die Wandenergie γ_0 der gleichen Wand in der Ruhe. Wie im folgenden gezeigt werden soll, ist dieser Zuwachs $\gamma - \gamma_0$ proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit v, mit der sich die Wand in Richtung ihrer Normalen verschiebt. Das bedeutet, einer Wand kommt bei Bewegung eine scheinbare kinetische Energie bzw. eine scheinbare Massenträgheit zu. Das Zustandekommen dieser Zunahme der Wandenergie kann man qualitativ leicht einsehen. Wie Néel zeigte, können in kleinen äußeren Feldern nur solche Wände auftreten, an denen die Magnetisierung nahezu quellenfrei ist, $\operatorname{div} \mathfrak{J} = 0$, weil mit Quellen der Magnetisierung starke innere Magnetfelder verbunden wären, welche im Gleichgewicht nicht bestehen können. An einer ebenen Wand muß daher die Komponente der Magnetisierung parallel zur Wandnormalen räumlich konstant sein. Da in einem spontan magnetisierten Ferromagnetikum der Betrag der Magnetisierung überall gleich der Sättigungsmagnetisierung J_S ist, liegen also die Magnetisierungsvektoren in der Wand, wenn man sie in einem Polardiagramm mit gemeinsamem Ursprung aufträgt, alle auf einem Kegel um die Richtung der Wandnormalen mit dem halben Öffnungswinkel ϑ_0, welcher gleich dem Winkel zwischen der Wandnormalen und den beiden Magnetisierungsrichtungen in den angrenzenden Weißschen Bezirken ist. Wegen der Quellenfreiheit der Magnetisierung muß die Wandnormale stets in der winkelhalbierenden Ebene zwischen diesen beiden Vorzugsrichtungen liegen.

[1] F. Bloch, Z. Physik 74, 295 [1932].
[2] M. Kersten, Probleme der techn. Magnetisierungskurve. Herausgeg. von R. Becker, Berlin 1938.
[3] R. Becker u. W. Döring, Ferromagnetismus. Berlin 1939. S. dort weitere Literatur.
[4] L. Néel, Cahiers de physique 25, 1 [Déc. 1944].

Diese Verteilung der Magnetisierungsvektoren auf einem Kegel gilt jedoch nicht ganz streng. Wenn der Beitrag der Kristallenergie und der Austauschkräfte zur Wandenergie in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel ϑ dieses Kegels bei ϑ_0 kein Minimum hat, werden die Magnetisierungsrichtungen in der Wand etwas von dem Kegel abweichen, bis, infolge des Auftretens einer magnetischen Doppelschicht und eines zugehörigen Magnetfeldes parallel zur Wandnormalen im Innern der Wand, ein Gleichgewicht zwischen Kristallenergie, Austauschenergie und dem Energieinhalt dieses Feldes erreicht ist, was in der Regel bei sehr kleinen Abweichungen von der Lage auf dem Kegel der Fall ist.

Wenn eine solche Wand sich bewegt, muß ein Spin, wenn die Wand über ihn hinwegläuft, eine Art Präzessionsbewegung auf diesem Kegel machen mit einer von der Verteilung der Spins in der Wand abhängigen veränderlichen Winkelgeschwindigkeit. Da mit dem magnetischen Moment der Elektronen ein mechanischer Drehimpuls verbunden ist, kann eine solche Richtungsänderung nur eintreten, wenn auf die Spins ein Drehmoment wirkt, welches, wie bei der pseudoregulären Präzession eines Kreisels, an jeder Stelle senkrecht zur Spinrichtung und zur Achse des Kegels gerichtet ist. Das äußere Magnetfeld, welches die Wand in Bewegung setzt, kann dieses Drehmoment im allgemeinen nicht aufbringen. Bei einer Wand, deren Normale senkrecht auf den Vorzugsrichtungen der beiden angrenzenden Weißschen Bezirke steht, d. h. $\vartheta_0 = \pi/2$, sieht man das für ein äußeres Magnetfeld parallel zur Wand besonders klar. Das Drehmoment des äußeren Feldes ist dann stets parallel zur Wandnormalen, während das bewegende Drehmoment senkrecht dazu steht. Es muß deshalb folgendes eintreten: Beim Einsetzen der Bewegung wird sich der Kegel, auf dem die Magnetisierungsvektoren liegen, etwas erweitern oder verengen, so daß sich im Innern der Wand neue Quellen der Magnetisierung ausbilden und daher ein zusätzliches Magnetfeld parallel zur Wandnormalen entsteht, welches gerade so groß wird, daß es das zur Richtungsänderung der Spins erforderliche Drehmoment liefert. Diese Änderung der Spinverteilung einer bewegten Wand gegen eine ruhende Wand ist zwar, wie wir sehen werden, sehr klein, aber sie hat zur Folge, daß die Wandenergie wächst. Die Spinverteilung in der ruhenden Wand macht die Summe aus Austauschenergie, Kristallenergie und Feldenergie des Magnetfeldes im Innern der Wand zum Minimum. Die Abweichung der Spinverteilung der bewegten Wand ist klein und in erster Näherung proportional der Geschwindigkeit v der Wand. Die Zunahme der Wandenergie ist daher proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit. Wir können setzen

$$\gamma = \gamma_0 + \frac{m}{2} v^2, \tag{1}$$

wobei der Proportionalitätsfaktor m die scheinbare Masse der Flächeneinheit der Wand darstellt.

Diese Größe m soll in den folgenden Abschnitten berechnet werden. Im letzten Teil soll gezeigt werden, daß das Auftreten dieser scheinbaren Massenträgheit der Wand wahrscheinlich von wesentlichem Einfluß auf die Frequenzabhängigkeit des Beitrages der Wandverschiebungen zur Magnetisierung ist. Bei magnetisch weichen Stoffen ist der Einfluß der Trägheit auf die reversiblen Wandverschiebungen im Wechselfeld größer als der Einfluß der Wirbelströme. Die bisher entwickelten Theorien der Dispersion der ferromagnetischen Suszeptibilität, welche nur die Wirbelströme berücksichtigen, können daher das wirkliche Verhalten nicht richtig erfassen.

I. Aufstellung des Variationsintegrals zur Berechnung der Spinverteilung in der bewegten Wand

Wir beschränken uns im folgenden auf kubische Kristalle. Die Richtungskosinusse der Magnetisierungsrichtung in bezug auf die tetragonalen Achsen als Koordinatenrichtungen seien α, β und γ. Bei Temperaturen weit unterhalb des Curie-Punktes, bei denen die Spins in einem kleinen, aber noch viele Spins umfassenden Bereich praktisch alle parallel sind, kann man nach Bloch[1] die Bewegung der Spins klassisch berechnen, indem man alle quantenmechanischen Operatoren durch ihre Erwartungswerte ersetzt. Der Erwartungswert der Austauschwechselwirkung zwischen einem hervorgehobenen Spin i mit den Erwartungswerten α_i, β_i, γ_i seiner Richtungskosinusse und allen seinen Nachbarn ist

$$F_A = \sum_{\substack{k \\ k \neq i}} \frac{A_{ik}}{2} [1 - \alpha_i \alpha_k - \beta_i \beta_k - \gamma_i \gamma_k]. \tag{2}$$

Darin bedeutet A_{ik} das Austauschintegral zwischen Spin i und k. Die Summe durchläuft alle Spins k der Umgebung von i, soweit A_{ik} von Null verschieden ist. Die x-Komponente des Drehmomentes, welches die Umgebung infolge von Austauschkräften auf den Spin i ausübt, beträgt daher

$$D_{Ax} = \frac{\partial F_A}{\partial \beta_i}\gamma_i - \frac{\partial F_A}{\partial \gamma_i}\beta_i = \sum_{\substack{k \\ k \neq i}} \frac{A_{ik}}{2}(\beta_i\gamma_k - \gamma_i\beta_k). \quad (3)$$

Wenn die Spinrichtung langsam mit dem Ort veränderlich ist, kann man sie durch eine stetige Funktion des Ortes approximieren. Mit Hilfe der Taylor-Entwicklung dieser Funktion an der Stelle des Spins i kann man in obiger Summe β_k und γ_k durch die Werte von β_i und γ_i und ihre Ableitungen ausdrücken. Da sich bei der Summation bei kubischer Symmetrie die linearen Glieder der Taylor-Reihe fortheben, erhält man bei Berücksichtigung aller Glieder bis zu den quadratischen

$$D_{Ax} = \frac{A\,a^2}{2}\left(\beta_i(\Delta\gamma)_i - \gamma_i(\Delta\beta)_i\right). \quad (4)$$

Darin bedeutet:

$$A = \frac{1}{2a^2}\sum_{\substack{k \\ k \neq i}} A_{ik}(x_k - x_i)^2 = \frac{1}{2a^2}\sum_{\substack{k \\ k \neq i}} A_{ik}(y_k - y_i)^2 = \frac{1}{2a^2}\sum_{\substack{k \\ k \neq i}} A_{ik}(z_k - z_i)^2. \quad (5)$$

A ist also ein Mittelwert über die Austauschintegrale. a ist die Gitterkonstante. Ist n die Anzahl der Elektronenspins pro Volumeneinheit, die zum Ferromagnetismus beitragen, so beträgt die Kristallenergie pro Spin

$$F_K = \frac{K}{n}(\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2), \quad (6)$$

wobei K die übliche Anisotropiekonstante pro Volumeneinheit ist. Das Drehmoment der Kristallenergie auf einen Spin folgt daraus genau so wie aus der Austauschwechselwirkung F_A. Fügt man zu diesen Drehmomenten noch das Moment des Magnetfeldes $\mathfrak{H}$ hinzu, so erhält man für die klassische Bewegungsgleichung der x-Komponente $\frac{\hbar}{2}\alpha$ des Spindrehimpulses

$$\frac{\hbar}{2}\frac{\partial\alpha}{\partial t} = \frac{A\,a^2}{2}(\beta\,\Delta\gamma - \gamma\,\Delta\beta) + \frac{2K}{n}\beta\gamma(\gamma^2 - \beta^2) + \mu(\beta H_z - \gamma H_y) \quad (7)$$

(μ = magnetisches Moment eines Elektrons). Die Gleichungen für die anderen Komponenten folgen daraus leicht durch zyklische Vertauschung von α, β und γ sowie von H_x, H_y und H_z.

Wir betrachten nun eine ebene Wand, deren Normale die Richtungskosinusse α_w, β_w und γ_w hat und sich mit der Geschwindigkeit v in Richtung der Normalen verschiebt. Dann sind alle Größen Funktionen des einen Ausdruckes

$$\eta = \alpha_w x + \beta_w y + \gamma_w z - v\,t. \quad (8)$$

Das äußere Magnetfeld, welches für die Spinverteilung im Innern der Wand von unwesentlichem Einfluß ist, wollen wir vernachlässigen und unter $\mathfrak{H}$ allein das Magnetfeld verstehen, welches durch die Quellen der Magnetisierung im Innern der Wand selbst erzeugt wird. Dieses Feld ist parallel zur Wandnormalen. Sein Betrag ergibt sich daraus, daß die Komponente der magnetischen Induktion parallel zur Wandnormalen von η unabhängig sein muß. Ist ϑ der Winkel zwischen der Magnetisierungsrichtung und der Wandnormalen, also

$$\cos\vartheta = \alpha\,\alpha_w + \beta\,\beta_w + \gamma\,\gamma_w, \quad (9)$$

so folgt daraus

$$H + 4\pi J_S \cos\vartheta = \text{konst}. \quad (10)$$

Da außerhalb der Wand in den beiden angrenzenden Weißschen Bezirken dieses Feld H verschwindet und der Winkel ϑ gleich ϑ_0 ist, hat die Konstante den Wert $4\pi J_S \cos\vartheta_0$.

Setzt man dies in die Bewegungsgleichung (7) ein, so ergibt sich für die Spinverteilung in der Wand die Differentialgleichung

$$\frac{A\,a^2}{2}\left(\beta\frac{d^2\gamma}{d\eta^2} - \gamma\frac{d^2\beta}{d\eta^2}\right) + \frac{2K}{n}\beta\gamma(\gamma^2 - \beta^2) + 4\pi J_S\,\mu(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)(\beta\gamma_w - \gamma\beta_w) + \frac{\hbar v}{2}\frac{d\alpha}{d\eta} = 0; \quad (11)$$

entsprechend ergeben sich für die anderen Komponenten zwei weitere Gleichungen, die man auch durch zyklische Vertauschung von α, β, γ und α_w, β_w, γ_w aus obiger Gleichung erhalten kann.

Die Lösung dieses recht komplizierten Gleichungssystems wird erheblich vereinfacht, wenn man beachtet, daß man es auch aus einem Variationsprinzip ableiten kann. Für eine ruhende Wand, also für $v = 0$, muß ja die Gleichgewichtsverteilung der Spins die Summe von Austauschwechselwirkung, Kristallenergie und Feldenergie in der Wand zum Minimum machen. Bei der bewegten Wand kommt zu diesen Energiebeiträgen einfach ein Zusatzterm hinzu, welcher proportional v ist. In gewissen, besonders einfachen Fällen für die Lage der Wandnormalen läßt sich dieser Zusatzterm leicht erraten. Durch naheliegende Verallgemeinerung findet man für die zu lösende Extremalaufgabe die Form

$$\int\limits_{\eta=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{A\,a^2\,n}{4} \left[\left(\frac{d\alpha}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{d\eta}\right)^2 \right] + K\,(\alpha^2\,\beta^2 + \beta^2\,\gamma^2 + \gamma^2\,\alpha^2) + 2\,\pi\,J_S^2\,(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)^2 \right.$$
$$\left. - \frac{\hbar\,v\,n}{2}\,\varphi\,\frac{d\cos\vartheta}{d\eta} \right\} d\eta = \text{Extremum}\,. \tag{12}$$

Darin ist $\mu\,n = J_S$ gesetzt worden. φ ist der Azimutalwinkel in Polarkoordinaten um die Wandnormalenrichtung als Polarachse. Führt man zwei neue Achsenrichtungen mit den Richtungskosinussen α_2, β_2, γ_2 bzw. α_3, β_3, γ_3 ein, welche mit der Wandnormalen zusammen ein Rechtssystem bilden, so gilt

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{\alpha\,\alpha_3 + \beta\,\beta_3 + \gamma\,\gamma_3}{\alpha\,\alpha_2 + \beta\,\beta_2 + \gamma\,\gamma_2}\,. \tag{13}$$

Man rechnet leicht nach, daß die Eulerschen Gleichungen dieser Variationsaufgabe unter Berücksichtigung der Nebenbedingung $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ auf die oben angegebenen Differentialgleichungen (11) führen. Für die folgenden Berechnungen ist es zweckmäßig, überall Polarkoordinaten ϑ, φ einzuführen. Dann nimmt das Integral (12) die Form an

$$\int\limits_{\eta=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{A\,a^2\,n}{4} \left[\left(\frac{d\vartheta}{d\eta}\right)^2 + \sin^2\vartheta \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2 \right] + K\,Q\,(\vartheta,\varphi) + 2\,\pi\,J_S^2\,(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)^2 \right.$$
$$\left. - \frac{\hbar\,v\,n}{2}\,\varphi\,\frac{d\cos\vartheta}{d\eta} \right\} d\eta = \text{Extremum}\,. \tag{14}$$

Darin ist der etwas komplizierte Ausdruck, der aus $\alpha^2\,\beta^2 + \beta^2\,\gamma^2 + \gamma^2\,\alpha^2$ bei Umrechnung in diese Polarkoordinaten entsteht, zur Abkürzung mit $Q\,(\vartheta,\varphi)$ bezeichnet worden:

$$Q\,(\vartheta,\varphi) = \alpha^2\,\beta^2 + \beta^2\,\gamma^2 + \gamma^2\,\alpha^2\,. \tag{15}$$

II. Lösung des Variationsproblems

Eine strenge Berechnung der Funktionen $\vartheta\,(\eta)$ und $\varphi\,(\eta)$, welche das Integral (14) zum Extremum machen, ist recht schwierig. Eine gute Näherungslösung gewinnt man aber, wenn man beachtet, daß in der ganzen Wand nahezu $\cos\vartheta \approx \cos\vartheta_0$ sein muß. Néel hat das bei seinen Berechnungen als streng gültig angenommen. Im Gleichgewicht ist der erste und zweite Term des Integrals (14), der den Beitrag der Austauschkräfte und der Kristallenergie zur Wandenergie darstellt, gleich groß. Da in normalen Materialien $2\pi J_S^2$ rund 100- bis 1000-mal größer ist als die Anisotropiekonstante, würde der dritte Term des Integrals ungeheuer überwiegen, wenn nicht $\cos\vartheta \approx \cos\vartheta_0$ wäre. Es liegt deshalb nahe, die kleine Differenz $u = \cos\vartheta - \cos\vartheta_0$ als neue abhängige Variable einzuführen. Ferner wollen wir das Verhältnis von K zu $2\pi J_S^2$ mit λ bezeichnen.

$$\lambda = \frac{K}{2\,\pi\,J_S^2}\,. \tag{16}$$

λ ist in den meisten Fällen klein. Für Eisen ist $\lambda = 2{,}3\cdot 10^{-2}$. Führt man noch die Länge $\delta = \sqrt{A a^2 n/4K}$ ein und statt η die dimensionslose Variable $\xi = \eta/\delta$, so nimmt das obige Integral die Form an

$$2\,\pi\,J_S^2\,\delta \int\limits_{\xi=-\infty}^{+\infty} \left\{ u^2 + \lambda \left[\frac{1}{1-(u+\cos\vartheta_0)^2} \left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 + (1-(u+\cos\vartheta_0)^2) \left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)^2 \right] \right.$$
$$\left. + \lambda\,Q\,(\vartheta,\varphi) - w\,\lambda\,\varphi\,\frac{du}{d\xi} \right\} d\xi = \text{Extremum}\,. \tag{17}$$

Darin ist $w = \frac{\hbar v n}{2 K \delta}$ ein dimensionsloses Maß für die Geschwindigkeit. Bei Eisen erreicht w bei einer Wandgeschwindigkeit $v = 10^4$ cm/sec die Größenordnung 1.

Wegen der Kleinheit von λ kann man zum Auffinden einer Näherungslösung so vorgehen, daß man die beiden unbekannten Funktionen $u(\xi)$ und $\varphi(\xi)$ nach Potenzen von λ entwickelt:

$$\begin{aligned} u(\xi) &= u_0(\xi) + \lambda u_1(\xi) + \lambda^2 u_2(\xi) + \cdots \\ \varphi(\xi) &= \varphi_0(\xi) + \lambda \varphi_1(\xi) + \lambda^2 \varphi_2(\xi) + \cdots \end{aligned} \tag{18}$$

Setzt man diese Entwicklung in (17) ein, so erhält man als Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von λ Integrale, die man einzeln durch geeignete Wahl der Entwicklungsfunktionen $u_0(\xi)$, $\varphi_0(\xi)$, $u_1(\xi)$ .... zum Extremum zu machen hat. Als erstes Teilintegral erhält man bei Berücksichtigung der von λ freien Glieder allein

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_0^2(\xi)\, d\xi = \text{Extremum}\,, \tag{19}$$

mit der Lösung $u_0(\xi) = 0$, d. h. man erhält in erster Näherung, wie zu erwarten, $\cos\vartheta = \cos\vartheta_0$.

Als Koeffizient des in λ linearen Gliedes von (17) erhält man alsdann

$$2\pi J_S^2 \delta \int_{\xi=-\infty}^{+\infty} \left[\sin^2\vartheta_0 \left(\frac{d\varphi_0}{d\xi}\right)^2 + Q_0(\varphi_0)\right] d\xi = \text{Extremum}\,. \tag{20}$$

Darin bedeutet $Q_0(\varphi_0)$ den Ausdruck $Q(u, \varphi)$ für $u = 0$, $\varphi = \varphi_0(\xi)$. Durch Nullsetzen der Variation erhält man daraus

$$2 \sin^2\vartheta_0 \frac{d^2\varphi_0}{d\xi^2} = \frac{dQ_0}{d\varphi_0}\,, \tag{21}$$

oder

$$\frac{d\varphi_0}{d\xi} = \frac{1}{\sin\vartheta_0} \sqrt{Q_0(\varphi_0)} + \text{Konstante}\,. \tag{22}$$

Wenn wir annehmen, daß die Konstante K der Kristallenergie positiv ist, ist außerhalb der Wand, wo die Spins in der Vorzugsrichtung liegen, $Q_0(\varphi_0) = 0$. Also muß die Integrationskonstante verschwinden. Berücksichtigt man nur die in λ linearen Glieder, so erhält man für den Energieinhalt der Flächeneinheit der Wand

$$\gamma_0 = 2\pi J_S^2 \delta\lambda \int_{\xi=-\infty}^{+\infty} \left[\sin^2\vartheta_0 \left(\frac{d\varphi_0}{d\xi}\right)^2 + Q_0(\varphi_0)\right] d\xi = 2 K\delta \sin\vartheta_0 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{Q_0(\varphi_0)}\, d\varphi_0\,. \tag{23}$$

Die Grenzen φ_1 und φ_2 des Integrals über φ_0 sind die Azimutalwinkel in den beiden an die Wand angrenzenden Weißschen Bezirken. Der Ausdruck (23) stimmt mit dem von Néel erhaltenen Ergebnis überein.

Wir wollen hier die Rechnung noch einen Schritt weiter führen. Der Koeffizient des Gliedes mit λ^2 in (17) lautet

$$\begin{aligned} 2\pi J_S^2 \delta \int_{\xi=-\infty}^{+\infty} \Bigg\{ u_1^2 + u_1 \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial u}\right)_{u=0} - 2\cos\vartheta_0 \left(\frac{d\varphi_0}{d\xi}\right)^2\right] - w\,\varphi_0 \frac{du_1}{d\xi} + 2\sin^2\vartheta_0 \frac{d\varphi_0}{d\xi}\frac{d\varphi_1}{d\xi} \\ + \varphi_1 \frac{dQ_0}{d\varphi_0} \Bigg\} d\xi = \text{Extremum}\,. \end{aligned} \tag{24}$$

Die letzten beiden Glieder bilden zusammen wegen der Differentialgleichung (21) für φ_0 ein totales Differential, welches bei Integration verschwindet, weil $\frac{d\varphi_0}{d\xi}$ an den Grenzen gleich Null ist. Die Funktion $\varphi_1(\xi)$ fällt daher aus dem Integral (24) ganz heraus. Aus der Extremalforderung ergibt sich

$$u_1(\xi) = -\frac{w}{2}\frac{d\varphi_0}{d\xi} + \cos\vartheta_0 \left(\frac{d\varphi_0}{d\xi}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Q}{\partial u}\right)_{u=0}. \tag{25}$$

Das Integral (17) ist nach Streichung des letzten, zu w proportionalen Gliedes einfach die Wandenergie pro Flächeneinheit. Setzt man darin die erhaltenen Näherungsausdrücke für $\varphi(\xi)$ und $u(\xi)$

ein, so erhält man bei Berücksichtigung aller Glieder bis zu den quadratischen in λ einschließlich

$$\gamma = 2 K \delta \sin \vartheta_0 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{Q_0(\varphi_0)}\, d\varphi_0 - K\delta\lambda \int_{\xi=-\infty}^{+\infty} \left[\cos \vartheta_0 \left(\frac{d\varphi_0}{d\xi}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Q}{\partial u}\right)_{u=0}\right]^2 d\xi + \frac{K\delta\lambda w^2}{4 \sin \vartheta_0} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{Q_0(\varphi_0)}\, d\varphi_0 . \qquad (26)$$

Man erkennt, daß infolge der genaueren Rechnung zu dem Ausdruck (23) zwei Glieder hinzugekommen sind, von denen das erste, negative, von der Wandgeschwindigkeit unabhängig ist. Falls nicht gerade $\vartheta_0 = \pi/2$ ist und die Ableitung von Q nach u bei $u = 0$ verschwindet, ist die Lage der Magnetisierungsvektoren auf dem Kegel $\vartheta = \vartheta_0$ nicht genau die energetisch günstigste Verteilung. Das erste Zusatzglied trägt dem Umstand Rechnung, daß die Wandenergie bei einer geringen Abweichung von dieser Lage niedriger ist. Der Größenordnung nach ist dieser Zusatz um einen Faktor λ kleiner als der Näherungsausdruck (23) und kann daher im allgemeinen unberücksichtigt bleiben.

Der letzte positive Summand in (26) ist von der gleichen Größenordnung, ist aber von der Geschwindigkeit der Wand abhängig und daher physikalisch bedeutungsvoll. Setzt man diesen Term gleich $\frac{m}{2} v^2$, so erhält man für die effektive Masse der Wand

$$m = \frac{\hbar^2 n^2 \lambda \gamma_0}{16 K^2 \delta^2 \sin^2 \vartheta_0} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\hbar}{2\mu}\right)^2 \frac{\gamma_0}{A a^2 n \sin^2 \vartheta_0} . \qquad (27)$$

Man kann im Prinzip diese Rechnung noch weiter treiben und höhere Potenzen von λ berücksichtigen. Dann kommen zu dem erhaltenen Ausdruck noch weitere Glieder mit höheren Potenzen von λ hinzu, die praktisch nicht viel ausmachen, da sie neben den berechneten Gliedern klein sind.

III. Diskussion des Ergebnisses

Zur zahlenmäßigen Berechnung der Wandenergie benötigt man außer bekannten Konstanten vor allem das mittlere Austauschintegral A. Seine Größe kann man am besten aus dem Verlauf der Sättigungsmagnetisierung bei tiefen Temperaturen entnehmen. Denn ohne jede weitere Annahme über die Größe der Austauschintegrale zwischen nächsten und zweitnächsten Nachbarn und unabhängig von der Zahl der Nachbarn folgt aus der klassischen Bewegungsgleichung (7), wie an anderer Stelle gezeigt wurde[5], das Blochsche $T^{3/2}$-Gesetz für die Sättigungsmagnetisierung

$$J_S = J_\infty \left[1 - \left(\frac{T}{\Theta}\right)^{3/2}\right]. \qquad (28)$$

Darin ist Θ eine Abkürzung für die Größe

$$\Theta = \frac{A a^2 \pi}{k} \left(\frac{4 n}{\zeta(3/2)}\right)^{2/3}. \qquad (29)$$

Setzt man den Wert $\zeta(3/2) = 2{,}612$ ein, so ergibt sich also $A a^2 n = 0{,}240\, k \Theta \sqrt[3]{n}$. Es ist nicht gesagt, daß Θ die Curie-Temperatur ist. Das wäre nur richtig, wenn das Blochsche $T^{3/2}$-Gesetz bis zur Curie-Temperatur gelten würde, was in Wirklichkeit nicht der Fall ist. Aus den Messungen von Fallot[6] für Eisen findet man $\Theta = 4050°$, also einen rd. 4-mal größeren Wert als die Curie-Temperatur. Da für Eisen $n = \frac{J_S}{\mu} = 1{,}87 \cdot 10^{23}\ \mathrm{cm}^{-3}$ ist, erhält man für dieses Material $A a^2 n = 7{,}8 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{erg\,cm}^{-1}$, und daher mit $K = 4{,}28 \cdot 10^5\ \mathrm{erg\,cm}^{-3}$ den Wert $\delta = 2{,}12 \cdot 10^{-6}$ cm. Für eine 90°-Wand, bei der die Wandnormale senkrecht auf den beiden Magnetisierungsrichtungen in den angrenzenden Weißschen Bezirken steht, ergibt sich bei Ausführung der Integration in (23)

$$\gamma_0 = K\delta = 0{,}9\ \mathrm{erg/cm^2}$$

und daher für die Masse aus (27)

$$m = 6{,}0 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{g/cm^2}.$$

Diese an sich geringfügige scheinbare Masse macht sich physikalisch bemerkbar in der Frequenzabhängigkeit der Magnetisierung durch

[5] W. Döring, Z. Physik, im Druck; G. Heller u. H. A. Kramers, Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **37**, 378 [1934].

[6] P. Weiß, C. R. hebd. Séances Acad. Sci. **198**, 1893 [1934].

Wandverschiebungen. Betrachten wir etwa eine 90°-Wand, die elastisch an ihre durch die inneren Spannungen festgelegte Gleichgewichtslage gebunden ist. Eine äußere Feldstärke H, parallel zu der Magnetisierungsrichtung in dem einen der angrenzenden Bezirke, wirkt auf die Wand wie ein Druck der Größe $p = H J_S$. Dadurch tritt statisch eine Wandverschiebung der Größe $x = H J_S / \alpha$ ein. In einem Wechselfeld lautet unter Berücksichtigung von Massenträgheit und Dämpfung durch die Wirbelströme die Bewegungsgleichung der Wand

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + \alpha x = J_S H(t). \qquad (30)$$

Mit dem komplexen Ansatz $H = H_0 e^{i \omega t}$ folgt daraus

$$x = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + i \frac{\omega}{\omega_1}} \frac{H_0}{\alpha} e^{i \omega t} \qquad (31)$$

mit den Abkürzungen $\omega_0 = \sqrt{\alpha/m}$ und $\omega_1 = \alpha/\beta$.

Die Größe der Bindungskonstanten α läßt sich aus der Anfangssuszeptibilität χ_0 bei der Frequenz Null abschätzen. Ist l der mittlere Abstand der Wände, und haben alle Wände die gleiche Bindungskonstante α, so gilt im statischen Feld größenordnungsmäßig

$$\chi_0 = \frac{J_S^2}{l \alpha}. \qquad (32)$$

Für die Eigenfrequenz ω_0 ergibt sich damit angenähert

$$\omega_0 \approx \sqrt{\frac{J_S^2}{l \chi_0 m}}, \qquad (33)$$

also für Eisen mit $l \approx 2 \cdot 10^{-4}$ cm und $\chi_0 \approx 20$ etwa $\omega_0 \approx 3{,}5 \cdot 10^9$ sec^{-1}.

Die Größe der Wirbelstromdämpfung einer Wand ist früher von Becker[7] abgeschätzt worden. Becker erhielt $\omega_1 \approx 10^{10}$ sec^{-1}, also einen etwa dreimal höheren Wert als ω_0. Wahrscheinlich ist aber der Wert von Becker zu niedrig, weil dabei nicht berücksichtigt wurde, daß bei hohen Frequenzen alle Magnetisierungsvorgänge nur in einer dünnen Haut an der Oberfläche stattfinden, in der sich die Wirbelströme nicht ungehindert ausbilden können.

Diese Abschätzungen sind naturgemäß nur sehr roh. Immerhin scheint daraus hervorzugehen, daß bei weichem Eisen die Eigenfrequenz der Wände niedriger liegt als die charakteristische Frequenz ω_1 der mikroskopischen Wirbelströme. Das würde bedeuten, daß die oszillierende Bewegung einer einzelnen Wand im Wechselfeld von konstanter Amplitude mit wachsender Frequenz eine deutliche Resonanz durchläuft. Genau in der Resonanz $\omega = \omega_0$ ist die Bewegung der Wand in der Phase um 90° gegen das Feld verschoben. Nach obigen Abschätzungen ist die Amplitude bei Resonanz etwa dreimal größer als bei sehr kleinen Frequenzen. Es ist aber nicht anzunehmen, daß solche Resonanzerscheinungen auch an der pauschalen Suszeptibilität bemerkbar werden, denn die Resonanzfrequenz hängt von der Bindungskonstanten α ab und wird daher von Wand zu Wand verschieden sein. Im Mittel wird wahrscheinlich der Realteil der Suszeptibilität bei Frequenzen in der Umgebung von ω_0 absinken, während der Imaginärteil dort ein Maximum durchläuft.

Von den bisher entwickelten Theorien der Dispersion der ferromagnetischen Permeabilität von Becker[7] und von Kittel[8] unterscheiden sich diese Überlegungen hauptsächlich dadurch, daß hiernach der Frequenzbereich, in dem die Suszeptibilität auf Null absinkt, nicht vom spezifischen Widerstand abhängen sollte. Vielleicht kann man eine gewisse Bestätigung dafür in dem Verhalten der ferromagnetischen Oxyde erblikken. Nach Birks[9] liegt bei diesen die Frequenz, bei der die Permeabilität abzunehmen beginnt, in der gleichen Größenordnung wie bei Eisen und Nickel, obwohl die elektrische Leitfähigkeit um viele Zehnerpotenzen geringer ist. Nach (31) sollte bei sehr hohen Frequenzen die Suszeptibilität negativ und reell werden, d. h. die Permeabilität muß dann einen kleinen Imaginärteil besitzen und einen Realteil < 1, welcher mit zunehmender Frequenz bis auf den Wert 1 steigt. Dieses Verhalten hat Birks beim γ-Fe_2O_3 tatsächlich gefunden. Bei Frequenzen oberhalb ω_0 muß man aber berücksichtigen, daß dann möglicherweise der Beitrag der Drehprozesse neben demjenigen der Wandverschiebungen noch eine wesentliche Rolle spielt. Dessen Frequenzabhängigkeit kann völlig anders verlaufen.

[7] R. Becker, Physik. Z. **39**, 856 [1938]; Z. techn. Physik **19**, 542 [1938]; R. Becker u. G. Richter, Ann. Physik (5) **36**, 340 [1939].

[8] Ch. Kittel, Physic. Rev. **70**, 281 [1946].

[9] J. B. Birks, Nature [London] **158**, 671 [1946].